**Ad-Soyad:** CEVAPLAR **02.01.2020**

**Numara:** **İmza:**

# SOYUT MATEMATİK I FİNAL SINAVI SORULARI

1) a) $\big[(p \wedge q) \vee [(p' \wedge q') \vee q]\big] \wedge p$ önermesine denk olan önermeyi bulunuz.

   b) $B$ bir küme, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ bir küme ailesi olmak üzere $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times B = \bigcup_{i\in I} (A_i \times B)$ olduğunu gösteriniz.

2) İkili işlem, cebirsel yapı ve grup tanımlarını yaparak birer örnek veriniz.

3) $f, h$ ve $g$ fonksiyonlarının tersi varsa $g \circ h \circ f$ fonksiyonunun da tersi vardır. Gösteriniz.

4) $f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon, $A, B \subseteq X$ olsun.

   a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

   b) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

   ifadelerinin sağlanıp sağlanmadığını gösteriniz.

5) $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$x\beta y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

   şeklinde tanımlanan $\beta$ bağıntısı denklik bağıntısı mıdır? Gösteriniz. Eğer $\beta$ bir denklik bağıntısı ise $7, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ elemanlarının denklik sınıflarını bulunuz.

6) $\gamma$, $A$ kümesi üzerinde, $\beta$, $B$ kümesi üzerinde sıralama bağıntısı olmak üzere $\forall\,(a,b),(c,d) \in A \times B$ için

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a\gamma c \text{ ve } b\beta d$$

   biçiminde tanımlansın. $(A \times B, \sim)$ sıralı bir küme midir? Gösteriniz.

**NOT:** 5. ve 6. sorular 20, diğer sorular 15 puandır. **BAŞARILAR**

1) a)

$$[(p\wedge q)\vee[(p'\wedge q')\vee q]]\wedge p \equiv [(p\wedge q)\vee[(p'\vee q)\wedge \underbrace{(q'\vee q)}_{1}]]\wedge p$$

$$\equiv [(p\wedge q)\vee[(p'\vee q)]]\wedge p$$

$$\equiv [(p\wedge q)\vee[\underbrace{(p'\wedge p)}_{0}\vee(q\wedge p)]]$$

$$\equiv [(p\wedge q)\vee(q\wedge p)]$$

$$\equiv p\wedge q$$

b) $(x,y)\in\left(\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\times B\right) \Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}A_i$ ve $y\in B$

$\Leftrightarrow \exists\, i\in I,\ x\in A_i$ ve $y\in B$

$\Leftrightarrow \exists\, i\in I,\ (x,y)\in A_i\times B$

$\Leftrightarrow (x,y)\in\bigcup_{i\in I}(A_i\times B)$

2) • A boştan farklı bir küme olmak üzere $f: A\times A \to A$ tanımlanan fonksiyona A üzerinde bir ikili işlem denir.

$$+ : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$$
$$(x,y)\longmapsto x+y$$

• Üzerinde en az bir ikili işlem tanımlanan bir kümeye cebirsel yapı denir.

$(\mathbb{Q},+)$

• $*$, A kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun. Birleşme, birim eleman ve ters eleman özellikleri sağlanıyorsa $(A,*)$ cebirsel yapısına grup denir.

$(\mathbb{Z},+)$

3) $f: X \longrightarrow Y,\quad h: Y \longrightarrow Z,\quad g: Z \longrightarrow M$ olsun.

- $g \circ h \circ f$ fonksiyonu 1-1 mi?

$\forall x, y \in X$ için

$$(g \circ h \circ f)(x) = (g \circ h \circ f)(y)$$

$$\Rightarrow g(h(f(x))) = g(h(f(y))) \qquad g,\ 1\text{-}1$$

$$\Rightarrow h(f(x)) = h(f(y)) \qquad h,\ 1\text{-}1$$

$$\Rightarrow f(x) = f(y) \qquad f,\ 1\text{-}1$$

$$\Rightarrow x = y$$

$\therefore$ $g \circ h \circ f$ 1-1 dir.

- $g \circ h \circ f$ fonksiyonu örten mi?

$\forall m \in M$ için $\exists x \in X$ için $(g \circ h \circ f)(x) = m$ ?

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ örten} \Rightarrow \forall m \in M \text{ için } \exists z \in Z \ni g(z) = m \\ h \text{ örten} \Rightarrow \forall z \in Z \text{ için } \exists y \in Y \ni h(y) = z \\ f \text{ örten} \Rightarrow \forall y \in Y \text{ için } \exists x \in X \ni f(x) = y \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \exists x \in X \ni (g \circ h \circ f)(x) = g(h(f(x)))$$
$$= g(h(y))$$
$$= g(z)$$
$$= m$$

$\therefore$ $g \circ h \circ f$ örtendir.

$\therefore$ $g \circ h \circ f$ fonksiyonunun tersi vardır.

4) a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$A_1 = \{-1, -2, 3, 4\}$ $\quad A_1 \cap A_2 = \{3, 4\}$

$A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

$f(A_1) \cap f(A_2) = \{1, 4, 9, 16\}$

$f(A_1 \cap A_2) = \{9, 16\}$

olduğundan eşitlik sağlanmaz.

b) $\forall x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

$\therefore A \subseteq f^{-1}(f(A))$

5) • yansıma özelliği

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ olduğundan $x \beta x$

• simetri özelliği

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$x \beta y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y - x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \beta x$

• geçişme özelliği

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$\left.\begin{array}{l} x \beta y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \\ y \beta z \Rightarrow y - z \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow x - z \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow x \beta z$

$\therefore$ $\beta$ denklik bağıntısıdır.

$\overline{7} = \{x \in \mathbb{R} : x \beta 7\} = \{x \in \mathbb{R} : x - 7 \in \mathbb{Z}\}$

$= \mathbb{Z}$

$$\overline{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2}\, \beta\, x\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x - \sqrt{2} \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x = a + \sqrt{2},\ a \in \mathbb{Z}\}$$

6) • yansıma özelliği

$\forall (a,b) \in A \times B \Rightarrow a \in A$ ve $b \in B$

$\Rightarrow a\gamma a$ ve $b \beta b$ ($\gamma$ ve $\beta$ nın yansıma özelliği)

$\Rightarrow (a,b) \sim (a,b)$

• ters simetri özelliği

$\forall (a,b), (c,d) \in A \times B$ için

$(a,b) \sim (c,d)$ ve $(c,d) \sim (a,b) \Rightarrow (a,b) = (c,d)$ ?

$(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow a \gamma c$ ve $b \beta d$

$(c,d) \sim (a,b) \Rightarrow c \gamma a$ ve $d \beta b$

($\gamma$ ve $\beta$ nın ters simetri özelliği)

$\Rightarrow a = c$ ve $b = d$

$\Rightarrow (a,b) = (c,d)$

• geçişme özelliği

$\forall (a,b), (c,d), (m,n) \in A \times B$ için

$(a,b) \sim (c,d)$, $(c,d) \sim (m,n) \Rightarrow (a,b) \sim (m,n)$ ?

$(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow a \gamma c$ ve $b \beta d$

$(c,d) \sim (m,n) \Rightarrow c \gamma m$ ve $d \beta n$

($\gamma$ ve $\beta$ nın geçişme özelliği)

$\Rightarrow a \gamma m$ ve $b \beta n$

$\Rightarrow (a,b) \sim (m,n)$

$\therefore$ $(A \times B, \sim)$ sıralı bir kümedir.